# I numeri reali come sezione nel campo dei numeri razionali

Come sappiamo, nel campo dei numeri razionali, le quattro operazioni fondamentali sono sempre possibili, nel senso che, effettuando sopra un qualunque insieme finito una sequela finita di operazioni fondamentali, otteniamo, in ogni caso, come risultato un numero razionale.

**Non esiste però alcun numero razionale che possa dirsi radice quadrata di 2, o di 5, o di 10 etc.**

Dimostrazione: facciamo vedere che l'eventualità che sia $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, essendo $\frac{m}{n}$ una frazione ridotta ai minimi termini, è falsa.

Infatti, avremo che $m^2 = 2n^2$ e ciò comporta uno dei seguenti casi:

1. solo n contenga il fattore 2
2. solo m contenga il fattore 2
3. né n né m contenga il fattore 2.

Esaminiamo ciascun caso:

il primo caso è chiaramente impossibile visto che non sussiste l'uguaglianza tra membri di cui il primo non contiene il fattore 2, contenuto invece nel secondo;

il secondo caso si rivela impossibile, visto che prevede l'uguaglianza fra membri di cui il primo contiene il fattore 2 elevato ad esponente pari, mentre il secondo conterrebbe 2 elevato ad esponente dispari;

il terzo caso è impossibile poiché prevede la presenza del fattore 2 nel secondo membro e non nel primo.

Oppure si può procedere in questo modo:

Dimostrazione: facciamo vedere che l'eventualità che sia $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, essendo $\frac{m}{n}$ una frazione ridotta ai minimi termini, è falsa.

Infatti, avremo che $m^2 = 2n^2$ ( 1 )

e ciò comporta che m è pari quindi sarà del tipo 2k cioè $m = 2k$

quindi elevando al quadrato si ha $m^2 = 4k^2$

sostituendo nella (1) si ha $4k^2 = 2n^2$

semplificando si ha $2k^2 = n^2$

questo ci dice che anche n è pari

quindi m ed n sono entrambi pari contro l'ipotesi che la frazione era ridotta ai minimi termini, l'assurdo è dipeso dall'aver negato la tesi quindi la tesi è vera.

Per rendere sempre possibile l'operazione di estrazione di radice quadrata è necessario ampliare il campo dei numeri razionali introducendo quei nuovi enti aritmetici, detti NUMERI IRRAZIONALI.

# Introduzione dei numeri irrazionali

Consideriamo a questo scopo da prima un numero razionale relativo qualunque n e costruiamo due classi di numeri A e B, ponendo in A tutti i numeri razionali relativi minori di n, ed in B tutti i numeri razionali relativi maggiori di n.
Queste due classi soddisfano le tre seguenti proprietà:

1. tutti i numeri razionali, escluso n, appartengono ad una delle due classi;
2. se un numero razionale a appartiene ad A, anche ogni altro numero razionale minore di a appartiene ad A; se un numero b appartiene a B, anche ogni numero razionale maggiore di b appartiene a B;
3. tra le due classi esiste un AVVICINAMENTO INDEFINITO, cioè pensato un numero razionale positivo $\varepsilon$, è possibile determinare un opportuno numero di B ed un opportuno numero di A, tali che la loro differenza risulti minore di $\varepsilon$.

Infatti, se per esempio consideriamo i due numeri $b = n + \frac{\varepsilon}{3}$ ed $a = n - \frac{\varepsilon}{3}$, si ha per essi $b - a = \left(n + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(n - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ .

Come conseguenza immediata di questa proprietà segue che la classe A non ha massimo (e la classe B non ha minimo) nel senso che se a è un numero qualsiasi di A, se ne può sempre trovare un altro, maggiore di esso, pure appartenente ad A ( e così se b è un numero appartenente a B, si può sempre trovare un altro numero minore di esso, pure appartenente a B ).

**Le due classi A e B così ottenute, individuano pienamente il numero n (da cui siamo partiti) come quell'unico numero razionale escluso da entrambe le classi.**

Se allora chiamiamo **SEZIONE NEL CAMPO DEI NUMERI RAZIONALI** una coppia di classi A e B, che godono delle proprietà 1. 2. e 3. , possiamo affermare che
**Ogni numero razionale individua una sezione ed è, a sua volta, da essa individuato**
Ne segue che sarà lecito <u>identificare</u> il numero razionale con la sezione da esso individuata.

E' essenziale a questo punto mostrare come sia possibile costruire due classi di numeri razionali che godono ancora delle proprietà 2. e 3. e della 1. , così modificata:
1*. Tutti i numeri razionali, NESSUNO ESCLUSO, appartengono ad una ed una sola delle due classi.
A questo scopo consideriamo un numero non quadrato perfetto, per esempio 2, e poniamo in A tutti i numeri negativi, lo zero e tutti i numeri razionali positivi il cui quadrato sia minore di 2, mentre poniamo in B tutti i numeri razionali positivi il cui quadrato sia maggiore di 2.

E' evidente che queste due classi soddisfano la proprietà 1*. , in quanto che se escludessero un numero razionale, questo dovrebbe essere quello il cui quadrato vale 2 (ma un tale numero razionale non esiste); le classi A e B verificano poi senz'altro le proprietà 2. e 3. Almeno per linee intuitive.
In conseguenza di quanto detto si perviene alla seguente definizione generalizzata di sezione nel campo razionale:
Si dice che due classi A e B di numeri razionali relativi formano una **SEZIONE NEL CAMPO RAZIONALE**, se godono delle seguenti tre proprietà:

I) tutti i numeri razionali relativi, uno al più eccettuato, appartengono ad una ed una sola delle due classi;

II) se un numero razionale a appartiene ad A, anche ogni altro numero razionale minore di a appartiene ad A; se un numero b appartiene a B, anche ogni numero razionale maggiore di b appartiene a B;

III) tra le due classi esiste un AVVICINAMENTO INDEFINITO, cioè pensato un numero razionale positivo $\varepsilon$ , è possibile determinare un opportuno numero di B ed un opportuno numero di A, tali che la loro differenza risulti minore di $\varepsilon$.

Se ora osserviamo che quando la I) coincide con la 1. , la sezione serve ad individuare il numero razionale n escluso, nel caso in cui la I) divenga la 1*. , così nel caso in cui la sezione non escluda alcun numero razionale, converremo di dire che definisce un nuovo ente numerico, detto **NUMERO IRRAZIONALE**.
L'insieme costituito dai numeri razionali e dai numeri irrazionali costituisce il **CAMPO DEI NUMERI REALI**, e possiamo quindi enunciare il risultato fondamentale:

**chiamasi numero reale una qualunque sezione nel campo razionale.**

# I numeri reali ed il continuo numerico

Quando i numeri relativi vengono rappresentati su di una retta, non si ha una corrispondenza biunivoca fra numeri interi relativi e punti della retta, nel senso che infiniti punti della retta non vengono occupati da numeri relativi.
Anche nella rappresentazione su di una retta dei numeri razionali relativi non si ha una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta ed i numeri razionali relativi ( è stato detto infatti di sezioni del campo razionale che non individuano un numero razionale).
Quando invece vengono rappresentati i numeri reali su di una retta, viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra detti numeri ed i punti della retta, visto che qualunque sezione nel campo razionale individua ora un numero reale (razionale o irrazionale che sia).
Si usa dire che sia i numeri interi che quelli razionali non costituiscono il continuo numerico, il quale è costituito, invece, dai numeri reali.

# APPUNTI PER ESEGUIRE IL CALCOLO DEI RADICALI IN R

Si tratta di un promemoria formato da algoritmi espressi sinteticamente in linguaggio comune e quindi senza rigore formale, correlati da una serie di esempi esplicativi.

## RADICALI IN R

**Esistenza**

La radice di indice pari di un numero negativo non esiste.
La radice di indice dispari di un numero reale esiste sempre ed è unica.
La radice di indice pari di un numero positivo esiste e ha lo stesso segno del radicando.

**Operazioni con i radicali in R**

Bisogna prima di tutto discutere la realtà dei radicali coinvolti, cioè individuare gli intervalli in cui tutti i radicali esistono

**Semplificazione di radicali in R**

a. indice del radicale ed esponente del radicando sono divisibili per un numero pari: si semplifica utilizzando il valore assoluto
b. indice del radicale ed esponente del radicando sono divisibili per un numero dispari e l'indice è dispari:
   in questo caso l'operazione può essere eseguita senza porre condizioni
c. indice del radicale ed esponente del radicando sono divisibili per un numero dispari e l'indice è pari:
   in questo caso la semplificazione può essere eseguita senza porre ulteriori condizioni, sono sufficienti quelle derivanti dalle condizioni di realtà.

**Moltiplicazione e divisione di radicali in R**

Bisogna considerare il segno del prodotto in relazione agli intervalli di esistenza dei radicali coinvolti

**Trasporto di un fattore sotto il segno di radice in R**

a. se l'indice della radice è dispari si procede senza imporre condizione
b. se l'indice della radice è pari e il fattore è positivo, si procede normalmente imponendo solo le condizioni di realtà
c. se l'indice della radice è pari e il fattore è negativo, oltre alle condizioni di realtà si lascia in evidenza il meno e si trasporta il fattore cambiato di segno.

**Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice in R**

a. se l'indice della radice è dispari l'operazione può essere eseguita senza imporre condizioni
b. se l'indice della radice è pari e l'esponente del fattore è multiplo pari dell'indice l'operazione non richiede condizioni aggiuntive rispetto a quelle di realtà
c. se l'indice della radice è pari e l'esponente del fattore è multiplo dispari dell'indice, si deve porre il fattore portato fuori in valore assoluto

Quello che devi comunque ricordare in ogni esercizio è:

1. imporre le condizioni di esistenza del radicale
2. verificare sempre la concordanza del segno tra primo e ultimo membro delle uguaglianze.

| | $\sqrt[2n]{a}$ | $\sqrt[2n+1]{a}$ |
|---|---|---|
| $a \geq 0$ | Esiste ed è $\sqrt[2n]{a} \geq 0$ | Esiste ed è $\sqrt[2n+1]{a} \geq 0$ |
| $a < 0$ | Non esiste | Esiste ed è $\sqrt[2n+1]{a} < 0$ |

ESEMPI

1° PROPRIETA' FONDAMENTALE

n dispari $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \forall a \in R$

n pari $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \forall a \geq 0$

non esiste per a < 0

2° PROPRIETA' FONDAMENTALE

n dispari $\sqrt[n]{a^n} = a \qquad \forall a \in R$

n pari $\sqrt[n]{a^n} = a \qquad \forall a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = -a \qquad \forall a < 0$

Oppure in sintesi n pari $\sqrt[n]{a^n} = |a| \qquad \forall a \in R$

OSS:

la proprietà invariantiva non si può applicare alle radici dei numeri negativi

$\sqrt[3]{-8} \neq \sqrt[6]{(-8)^2}$ infatti $\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \wedge \quad \sqrt[6]{(-8)^2} = +2$

ESEMPI DI SEMPLIFICAZIONE

a. $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|}$

b. $\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3]{a^2}$ $\quad$ $\sqrt[9]{a^3} = \sqrt[3]{a}$

c. $\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3} \quad \forall a \geq 0$ per a < 0 non esiste

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DI RADICALI

a. $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \qquad \forall (x,y) \in R \times R$

b. $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|} \qquad \forall (x,y) \in R \times R$

c. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[15]{a^{11}} \qquad \forall a \in R$

d. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^5} \qquad \forall a \geq 0$

e. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2 b^3} \qquad \forall a \geq 0 \wedge \forall b \geq 0$
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt[6]{a^2 b^3} \qquad \forall a < 0 \wedge \forall b \geq 0$

f. $\sqrt[3]{a-2} \cdot \sqrt{a} = -\sqrt[6]{(2-a)^2 a^3} \qquad \forall 0 \leq a \leq 2$
$\sqrt[3]{a-2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{(a-2)^2 a^3} \qquad \forall a \geq 2$
infatti $\quad C.E.\ \ a \geq 0$
$segno\ \ 0 \leq a \leq 2 \quad negativo$
$segno\ \ a \geq 2 \quad positivo$

TRASPORTO SOTTO IL SEGNO DI RADICE

a. $a \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^4} \qquad \forall a \in R$

b. $a^2 \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^4 b} \qquad \forall a \in R \wedge \forall b \geq 0$

c. $(a-1)\sqrt{a} = -\sqrt{(1-a)^2 a} \qquad \forall 0 \leq a \leq 1$
$(a-1)\sqrt{a} = \sqrt{(a-1)^2 a} \qquad \forall a \geq 1$
infatti $\quad C.E.\ \ a \geq 0$
$segno\ \ 0 \leq a \leq 1 \quad negativo$
$segno\ \ a \geq 1 \quad positivo$

TRASPORTO FUORI DAL SEGNO DI RADICE

a. $\sqrt[3]{x^3 y} = x\sqrt[3]{y} \qquad \forall x \in R \wedge \forall y \in R$

b. $\sqrt{b(a^2+1)^2} = (a^2+1)\sqrt{b} \qquad \forall a \in R \wedge \forall b \geq 0$

c. $\sqrt[4]{a^4 b} = |a| \cdot \sqrt[4]{b} \qquad \forall a \in R \wedge \forall b \geq 0$

d. $\sqrt[4]{a^7 b} = |a| \cdot \sqrt[4]{a^3 b} \qquad (\forall a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (\forall a \leq 0 \wedge b \leq 0)$